YAWARAKA!

数学道具箱

数の話

$\boxed{\text{自然数}}$　＋－
↓ ひきざんで，ゼロ・負の整数が出現
$\boxed{\text{整数}}$　＋－×
↓ わりざんで，分数が出現
$\boxed{\text{有理数}}$　＋－×÷
↓ 方程式，極限で無理数（$\sqrt{2}$，π など）が出現
$\boxed{\text{実数}}$　数直線に対応
↓ 方程式で虚数（i, ω など）が出現
$\boxed{\text{複素数}}$　複素平面に対応

（注１）$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ （a, b, c, d ：有理数）
$\Rightarrow$ 　$a=c, b=d$
（注２）$a+bi=c+di$ （a, b, c, d ：実数）
$\Rightarrow$ 　$a=c, b=d$

$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$
$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$
$\sqrt{5}=2.2360679\cdots$
$\sqrt{6}=2.4494897\cdots$
$\sqrt{7}=2.6457513\cdots$
$\sqrt{10}=3.1622776\cdots$

（問）空白を埋めよ。
$\log_{10} 1=0$
$\log_{10} 2=0.3010\cdots$
$\log_{10} 3=0.4771\cdots$
$\log_{10} 4=$
$\log_{10} 5=$
$\log_{10} 6=$
$\log_{10} 7=0.8451\cdots$
$\log_{10} 8=$
$\log_{10} 9=$
$\log_{10} 10=1$

$2^{10}=1024$

$8!=40320$
$9!=362880$

２次の道具

$\boxed{\text{平方完成}}$
↓
$\boxed{\text{解の公式}}$
↓
$\boxed{\text{判別式}}$（解の公式のルート内）
↓
$\boxed{\text{解と係数の関係}}$
$1\cdot x^2-(\text{解の和})x+(\text{解の積})=0$

２次方程式の解の配置問題

解　⇔　グラフの共有点　に対応して
判別式，軸，端点　の条件を考える

（注）一区間一解なら端点のみ，一区間二解ならＤ軸端点すべて。

最大最小問題⇒候補を絞ってグラフで整理

【例題 01】

$0 \leqq x \leqq 1$ であるとき，$y = x^2 + ax + 2$ の最小値を $m(a)$，最大値を $M(a)$ とする。

（1） $m(a)$ を求めよ。

（2） $M(a)$ を求めよ。

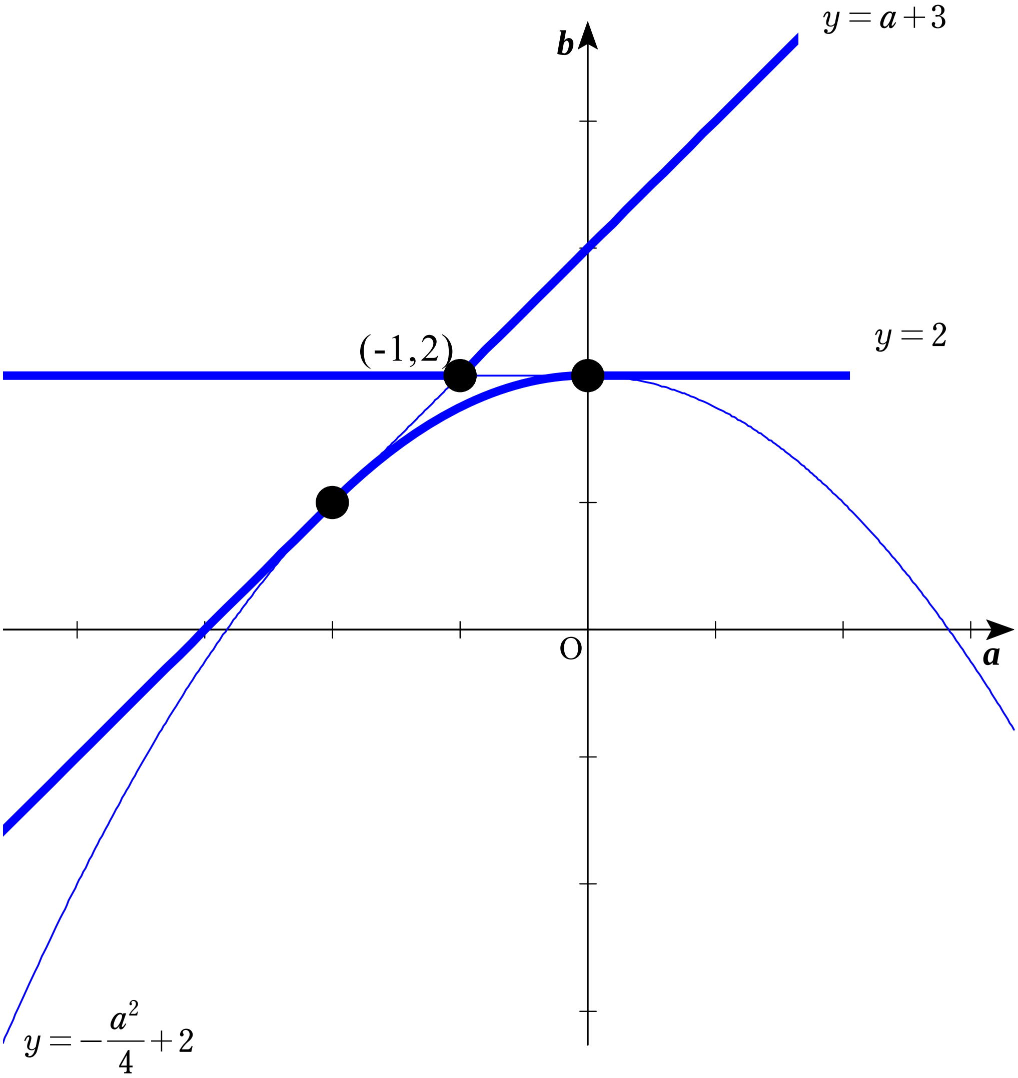
【解答】

最小値の候補は，

$$\begin{cases} \text{変域内の軸} \quad y = f\left(-\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + 2，\text{ただし，} 0 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1 \text{ つまり } -2 \leqq a \leqq 0 \text{ のときのみ} \\ \text{左端} \quad y = f(0) = 2，\text{右端} \quad y = f(2) = a + 3 \end{cases}$$

これらを ab 平面に図示し，最小のものを拾う。

最大値の候補は両端のみ。ここから最大のものを拾う。



解の問題の処理

（１）　解を求める。

（２）　解を元の方程式に代入＆次数下げ

（３）　解と係数の関係

（４）　解　⇔　因数

（５）　解　⇔　グラフの共有点の x 座標　（できれば**定数分離**）

（特殊な問題）

○共通解

○共役解

○1 の 3 乗根 ω

○相反方程式

○3 次方程式の重解問題に注意

【例題 02】

方程式 $2x^2-3x+4=0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，$(\alpha^2+2)(2\beta^2+3\beta+4)$ の値を求めよ。

【例題 03】

方程式 $x^3+ax+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

【例題 04】

k を実数とする。x の 3 次方程式 $x(x^2-4k+4)+k(k-2)^2=0$ の解がすべて実数であるような k の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \leqq k \leqq \boxed{\text{ツ}}$ である。

整式＝n次式

わりざんの原理

$$F \div P = Q \text{ あまり } R$$

$$\Rightarrow \quad F = P \times Q + R$$

ただし，$(P\text{の次数}) > (R\text{の次数})$

㊟　因数定理

$f(x)$が$(x-\alpha)$を因数に持つ　つまり　$(x-\alpha)$で割り切れる

$\Leftrightarrow \quad f(x) = (x-\alpha) \times \boxed{}$

$\Leftrightarrow \quad f(\alpha) = 0 \quad \leftarrow \quad x = \alpha$を代入してゼロ

㊟　剰余の定理　も同様にわりざんの原理から作れる。

２次式で割る問題

（１）実際にわり算
（２）余りの変形
（３）微分の利用
（４）虚数でも強引に代入

【例題 05】2011 岩手医科

xの整式$\mathrm{P}(x)$をx^2+1，x^2+2で割ったときの余りをそれぞれ$4x+4$，$4x+8$とするとき，

(1)　$\mathrm{P}(x)$を$(x^2+1)(x^2+2)$で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$\mathrm{P}(x)$を 5 次の多項式として，$\mathrm{P}(0)=-2$，$\mathrm{P}(1)=6$とするとき，$\mathrm{P}(x)$を求めよ。

最大最小

$\boxed{\text{基礎}}$　グラフを描いて高さ比べ
２次関数⇒平方完成
三角関数⇒諸公式の利用
一般には⇒微分

$\boxed{\text{応用}}$　２変数以上 or 整式（n 次式）でないとき　など

（１）$\boxed{\text{一文字消去}}$（ただし変域に注意）

（２）$\boxed{\text{図示}}$して共有点の存在条件に帰着（線形計画法）

（３）$\boxed{\text{文字の置き換え（変域に注意）}}$
（対称式は和と積で，$x=\frac{b}{a}$ など）
（注）和と積の置き換えでは隠れた実解条件に注意

$\boxed{\text{パラメーター表示}}$（円・だ円・双曲線など）
$x^2+y^2=r^2$ のとき，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と表せる。（２変数⇒１変数）

（４）$\boxed{\text{有名不等式の利用}}$
（例）相加相乗，Cauchy-Schwarz の不等式など
相加相乗　$a>0, b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成立　（等号成立は $a=b$）
CS-不等式　$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \geqq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$　（等号成立は $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ のとき）
三角不等式　$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$　（等号成立は $\vec{a}, \vec{b}$ が同じ向きのとき）

（５）$\boxed{\text{逆手法}}$（主役交代して，解の存在条件に帰着）

（６）（最後の手段）$\boxed{\text{一文字固定}}$

【例題 06】$x^2+y^2=2$ のもとで，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。（できるだけ多くの解法で解け）

【例題 07】正の数 a, b が $a^3+b^3=5$ を満たすとき，$a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ。（2012 昭和）

逆手法を少しだけ

【例題 08】関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ の最大，最小を微分法を用いずに求めよ。

答　最大値 $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$，最小値 $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$

【例題 09】実数 x, y, z が関係式　$x^2+y^2+z^2-10x-11=0, x^2-yz-4x-5=0$ を満たすとき，

　x のとり得る値の範囲を求めよ。

答　$-1 \leqq x \leqq 7$

文字の置き換え チェック

関数における文字の置き換えは「合成関数」とみなせる。

(1)　2か所以上に出てくるカタマリを t とおく

(2)　$t=x+\dfrac{1}{x}$ 型　の置き換え。

(例) $t=2^x+2^{-x}$

(3)　$\sin x, \cos x$ の対称式　⇒　$t=\sin x+\cos x$ でおきかえ

【発展】合成関数の追跡

【例題10】難

a, b を実数の定数とする。x に関する方程式

$$\left(x^2-2x+a\right)^2+\left(x^2-2x+a\right)+b=0$$

の実数解はちょうど2個であり, $0<x<1$ の範囲にはただ1つの解しかないという。このとき, 点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。ただし, $b<\dfrac{1}{4}$ とする。